

Changes of S-parameters and Noise Parameters due to Feedback フィードバックによる S パラメータと雑音パラメータの変化 武安義幸 / JA6XKQ

低雑音増幅器(LNA = Low Noise Amplifier)の設計において、雑音指数(NF = Noise Figure)に着目した所謂 NF マッチングと入力ポートのパワーマッチングは、デバイス単体では両立しない。両特性を両立させるためには、デバイスにフィードバックを掛ける手法が一般的である。

LNA の設計過程では、デバイス単体の S パラメータと雑音パラメータを、フィードバックを掛けたパラメータに変換する必要がある。その変換過程について調べた複数の文献から要点を備忘録としてまとめる。

S パラメータの変換

FET のソースに直列にインダクタを挿入してフィードバックを掛けた時の S パラメータを、文献 [1] *1 にしたがって計算する。計算には 2 ポート / 3 ポートの変換を用いる。

FET 単品の S パラメータは、ソースを接地した 2 ポート回路網として取扱われている。FET のソースに直列にインダクタを挿入するので、FET のソースを開放した 3 ポート回路網として一旦取扱う。図-1 において Zs はフィードバックを与える素子である。

まず、FET 単品での、すなわち 2 ポートの S パラメータを、

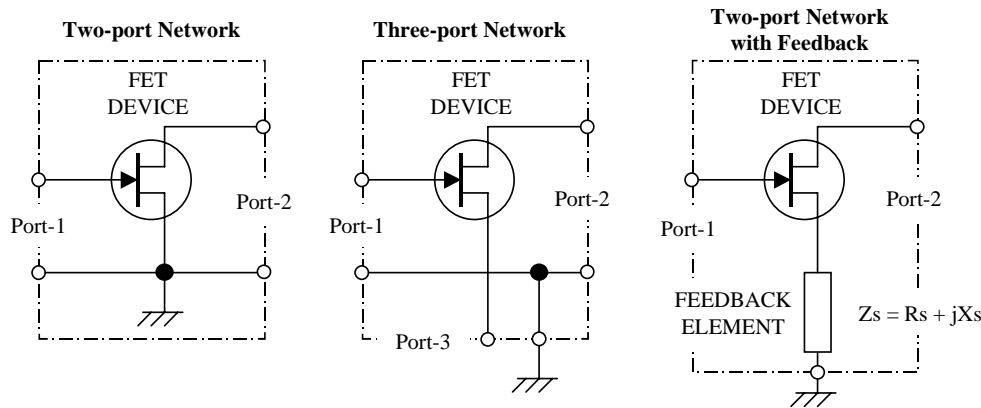


図-1 : 2 ポート / 3 ポート回路網

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \dots \text{式 (1.1)}$$

とする。次に、FET のソースを開放した 3 ポートの S パラメータは、FET 単品の S パラメータを用いて次式で示される。2 ポートと 3 ポートを区別するために、3 ポートの S パラメータを 3S と表記する。

$$[{}^3S] = \begin{bmatrix} {}^3S_{11} & {}^3S_{12} & {}^3S_{13} \\ {}^3S_{21} & {}^3S_{22} & {}^3S_{23} \\ {}^3S_{31} & {}^3S_{32} & {}^3S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(S_{11} + \frac{\Delta_{11}\Delta_{12}}{4 - \Delta} \right) & \left(S_{12} + \frac{\Delta_{11}\Delta_{21}}{4 - \Delta} \right) & \frac{2\Delta_{11}}{4 - \Delta} \\ \left(S_{21} + \frac{\Delta_{22}\Delta_{12}}{4 - \Delta} \right) & \left(S_{22} + \frac{\Delta_{22}\Delta_{21}}{4 - \Delta} \right) & \frac{2\Delta_{22}}{4 - \Delta} \\ \frac{2\Delta_{12}}{4 - \Delta} & \frac{2\Delta_{21}}{4 - \Delta} & \frac{\Delta}{4 - \Delta} \end{bmatrix} \quad \dots \text{式 (1.2)}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 1 - S_{11} - S_{12} \\ \Delta_{12} &= 1 - S_{11} - S_{21} \\ \Delta_{21} &= 1 - S_{12} - S_{22} \\ \Delta_{22} &= 1 - S_{21} - S_{22} \\ \Delta &= S_{11} + S_{22} + S_{12} + S_{21} \end{aligned} \quad \dots \text{式 (1.3)}$$

である。開放されたソースに Zs を直列に接続し、FET との総合で 2 ポート回路網と見なした S パラメータは次式で示される。FET 単品での S パラメータと区別するために、フィードバックを掛けた時の S パラメータを 2S と表記する。

$$[{}^2S] = \begin{bmatrix} \left({}^3S_{11} - \frac{{}^3S_{13} {}^3S_{31}}{{}^3S_{33} - \Gamma^{-1}} \right) & \left({}^3S_{12} - \frac{{}^3S_{13} {}^3S_{32}}{{}^3S_{33} - \Gamma^{-1}} \right) \\ \left({}^3S_{21} - \frac{{}^3S_{23} {}^3S_{31}}{{}^3S_{33} - \Gamma^{-1}} \right) & \left({}^3S_{22} - \frac{{}^3S_{23} {}^3S_{32}}{{}^3S_{33} - \Gamma^{-1}} \right) \end{bmatrix} \quad \dots \text{式 (1.4)}$$

ここで、

$$\Gamma = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \quad \dots \text{式 (1.5)}$$

であり、Z0 は正規化基準インピーダンスである。

以上の変換でフィードバックを掛けた時の S パラメータが求められた。

変換式のプログラムを確認するために、次に数値例を示す。FET 単品の S パラメータを、

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.9 \angle 150^\circ & 0.07 \angle 120^\circ \\ 1.7 \angle -80^\circ & 1.08 \angle -56^\circ \end{bmatrix}$$

とする。式 (1.3) は、

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 1.8144 - j0.5106 \\ \Delta_{12} &= 1.4842 + j1.2242 \\ \Delta_{21} &= 0.4311 + j0.8347 \\ \Delta_{22} &= 0.1009 + j2.5695 \\ \Delta &= 0.0847 - j2.0589 \end{aligned}$$

となる。これらを式 (1.2) へ代入すると、

$$[{}^3S] = \begin{bmatrix} 0.396 \angle 84.4^\circ & 0.393 \angle 29.3^\circ & 0.852 \angle -43.5^\circ \\ 0.582 \angle -79.1^\circ & 0.534 \angle -54.7^\circ & 1.163 \angle 60^\circ \\ 0.87 \angle 11.8^\circ & 0.425 \angle 34.9^\circ & 0.466 \angle -115.4^\circ \end{bmatrix}$$

3 ポートでの S パラメータが求められる。次に、ソースに $Z_s = j25.0542 \Omega$ のインダクタンスでフィードバックを掛ける。式 (1.5) は、

$$\Gamma = -0.5986 + j0.8010$$

となり、3 ポートの S パラメータを用いて式 (1.4) から、

$$[{}^2S] = \begin{bmatrix} 1.722 \angle 100.1^\circ & 0.714 \angle 94.8^\circ \\ 2.083 \angle -136.4^\circ & 1.163 \angle -102.5^\circ \end{bmatrix}$$

フィードバックを掛けた 2 ポートでの S パラメータが計算できた。

雑音パラメータの変換

デバイス単体の雑音パラメータ(Noise Parameters)は、最適ソース反射係数(Optimum noise reflection) Γ_{opt} 、最小雑音指数(Minimum Noise Figure) F_{min} 、等価雑音抵抗(Equivalent Noise Resistance) R_n がデバイスのデータシートに記載されている。最適ソース反射係数を振幅と位相に分けて、これらの雑音パラメータを Four Noise Parameters と一般的に称する。[3] *2 マッチングと雑音指数との関係は雑音パラメータを用いて次式で示される。

$$F = F_{min} + \frac{4R_n}{Z_0} \frac{|\Gamma_s - \Gamma_{opt}|^2}{(1 - |\Gamma_s|^2)|1 + \Gamma_{opt}|^2} \quad \dots \text{式 (2.1)}$$

ここで Γ_s は、デバイスからソース側を見た時のマッチングを示す反射係数である。

デバイスにフィードバックを掛けると雑音パラメータはどのように変化するのか？ 文献 [4] にフィードバックの形態に応じた雑音パラメータの変換が論じられている。*3 ここでは、FET デバイスのソースに直列にフィードバック ($Z_s = R_s + jX_s$) を掛けた 図-1 と同じ例を示す。

変換に関わるマトリクス n を導入する。 n は次式で定義される。

$$\begin{aligned} [n] &= \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_{21}'M - S_{21}'N}{S_{21}'C_{21}' + S_{21}'C_1} \\ 0 & \frac{S_{21}'C_1}{S_{21}'C_{21}' + S_{21}'C_1} \end{bmatrix} \quad \dots \text{式 (2.2)} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} S_{11}' &= S_{22}' = \frac{-Z_0}{Z_0 + 2Z_s} \\ S_{12}' &= S_{21}' = \frac{2Z_s}{Z_0 + 2Z_s} \end{aligned} \quad \dots \text{式 (2.3)}$$

$$\begin{aligned}
M &= (1 + S'_{11})(1 - S'_{22}) + S'_{12}S'_{21} \\
N &= (1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21} \\
C_1 &= (1 - S'_{11})(1 - S'_{22}) - S'_{12}S'_{21} \\
C'_1 &= (1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21} \\
[S] &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\quad \dots \text{式 (2.4)}$$

[S] は、FET 単品での S パラメータである。

この変換のためのマトリクス n を用いて、フィードバックを掛けた時の雑音パラメータは次式で示される。

$$\begin{aligned}
R'_n &= R_n |n_{11} + n_{12}Y_{cor}|^2 + G_n |n_{12}|^2 \\
G'_n &= \frac{G_n R_n}{R'_n} |n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}|^2 \\
Y'_{cor} &= \frac{R_n}{R'_n} (n_{21} + n_{22}Y_{cor})(n_{11}^* + n_{12}^*Y_{cor}^*) + \frac{G_n}{R'_n} n_{22}n_{12}^*
\end{aligned}
\quad \dots \text{式 (2.5)}$$

表記において、右肩の ' は変換後のパラメータであることを示し、* は共役複素数を示す。最小雑音指数 F'_{min} は、

$$F'_{min} = 1 + 2R'_n(G'_{cor} + G'_{opt}) \quad \dots \text{式 (2.6)}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
G'_{opt} &= \sqrt{\frac{G'_n}{R'_n} + G'_{cor}{}^2} \\
B'_{opt} &= -B'_{cor}
\end{aligned}
\quad \dots \text{式 (2.7)}$$

FET 単品での雑音パラメータとして、デバイスのデータシートでは (Γ_{opt} 、NFmin、 R_n) が一般的に使用されているが、式 (2.5)、(2.6) および (2.7) では、等価雑音コンダクタンス (Equivalent Noise Conductance) G_n 、最適雑音コンダクタンス (Optimum Noise Conductance) G_{opt} 、最適雑音サセプタンス (Optimum Noise Susceptance) B_{opt} 、相関アドミッタンス (Correlation Admittance) Y_{cor} が用いられている。そこで、(Γ_{opt} 、NFmin、 R_n) からなる雑音パラメータを後者へ変換して、式 (2.5) ~ (2.7) を利用する。

まず、 Γ_{opt} を Z_{opt} を経由して、 G_{opt} と B_{opt} へ変換する。

$$\begin{aligned}
Z_{opt} &= \frac{1 + \Gamma_{opt}}{1 - \Gamma_{opt}} Z_0 \\
Y_{opt} &= \frac{1}{Z_{opt}} \\
G_{opt} &= \text{real}(Y_{opt}) \\
B_{opt} &= \text{imag}(Y_{opt})
\end{aligned}
\quad \dots \text{式 (2.8)}$$

Y_{cor} と G_n は、 F_{min} 、 R_n および G_{opt} と B_{opt} から次式のように変換される。[5] [6] *4

$$\begin{aligned}
Y_{cor} &= \frac{F_{min} - 1}{2R_n} - (G_{opt} + jB_{opt}) \\
G_n &= \left(G_{opt}^2 - \left[\frac{F_{min} - 1}{2R_n} - G_{opt} \right]^2 \right) R_n
\end{aligned}
\quad \dots \text{式 (2.9)}$$

上記の変換の結果を式 (2.5) ~ (2.7) へ適用する。

変換式のプログラムを確認するために、次に数値例を示す。FET 単品の S パラメータを、

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.789 \angle -142.2^\circ & 0.171 \angle -9.2^\circ \\ 1.442 \angle 55.3^\circ & 0.488 \angle -99.4^\circ \end{bmatrix}$$

とする。また、FET 単品の雑音パラメータを、

$$\begin{aligned}
F_{min} &= 1.2 \text{ (dB)} \\
R_n &= 14 \text{ (}\Omega\text{)} \\
\Gamma_{opt} &= 0.675 \angle 113.8^\circ
\end{aligned}$$

とする。ここへ、14 GHz にて 200 pH のインダクタを FET のソースへ直列接続してフィードバックを掛けた場合の雑音パラメータを計算する。まず、インダクタのリアクタンスは、

$$Z_S = +j17.5929$$

式 (2.8) は、

$$Z_{opt} = 13.6066 + j30.8735$$

$$Y_{opt} = 0.0120 - j0.0271$$

$$G_{opt} = 0.0120$$

$$B_{opt} = -0.0271$$

式 (2.9) は、

$$Y_{cor} = -0.0006 + j0.0271$$

$$G_n = 0.0020$$

式 (2.3) と (2.4) は、

$$S'_{11} = S'_{22} = -0.6688 + j0.4706$$

$$S'_{12} = S'_{21} = 0.3312 + j0.4706$$

$$M = 0.6624 + j0.9413$$

$$N = 0.8104 - j0.1632$$

$$C_1 = 1.3490 + j1.1260$$

$$C'_1 = 2.6752 - j1.8826$$

これらを式 (2.2) へ代入して、

$$[n] = \begin{bmatrix} 1 & -1.4414 + j15.0362 \\ 0 & 0.9112 - j0.1781 \end{bmatrix}$$

このマトリクス n を用いて式 (2.5) は、

$$R'_n = 5.4111$$

$$G'_n = 0.0045$$

$$Y'_{cor} = 0.0020 + j0.0337$$

式 (2.7) は、

$$G'_{opt} = 0.0288$$

$$B'_{opt} = -0.0337$$

この結果から式 (2.8) を逆にたどると、 F'_{min} を与える Γ'_{opt} は、

$$\begin{aligned} \Gamma'_{opt} &= -0.4443 + j0.3836 \\ &= 0.587 \angle 139.2^\circ \end{aligned}$$

F'_{min} は、

$$\begin{aligned} F'_{min} &= 1.3332 \\ &= 1.249 \text{ (dB)} \end{aligned}$$

となる。フィードバックを掛けた時の雑音パラメータが計算できた。

まとめ

FET のソースに直列にインダクタを挿入してフィードバックを掛けた時の S パラメータを求めた。2 ポートと 3 ポートの S パラメータの変換については、文献 [2] も参考になる。また、同様にフィードバックを掛けた時の雑音パラメータを求めた。

//
☆

初版 : 2012年4月23日

第二版 : 2012年4月26日

- 表記統一、 $G_{opt} + jB_{opt}$ を $G'_{opt} + jB'_{opt}$ へ
- 式 (2.8) の Y_{opt} の誤記訂正
- $G'_{opt} + jB'_{opt}$ から Γ'_{opt} の導出に追記

余談

*1

当初、参照した文献は、

Working with transistor S-parameters
Duangrat Eungdamrong, Devendra Misra
RF Design Magazine, January 2002

であるが、示されている変換式では期待する値が得られなかった。記述に誤りがあるのではないかと思ったが自分自身では数式を導出できないので、参考文献として示されている同じ筆者による文献 [1] を調べた。その結果、四則演算での正負符号に誤りがあることが

確認できた。

*2

雑音パラメータの表現方法には(Γ_{opt} 、 N_{Fmin} 、 R_n)の他に、最適ソース反射係数の代わりにソースのコンダクタンス/サセプタンスやレジスタンス/リアクタンスを用いるものや、等価雑音抵抗の代わりに等価雑音コンダクタンスや端子不変定数を用いるものがある。文献 [3] では各種の雑音パラメータの表現方法を示している。文献 [3] のリプリントをMini-Circuits 社がアプリケーション・ノート AN-60-040 として公開している。しかし、雑音パラメータの各種表現方法に関する部分を省略しているので、オリジナルの文献 [3] を参照すべきである。

*3

当初、参照した文献は、

RF/MICROWAVE CIRCUIT DESIGN FOR WIRELESS APPLICATIONS
Ulich L. Rohde, David P. Newkirk

であるが、示されている変換式では期待する値が得られなかった。記述に誤りがあるのではないかと思い、更に調べると、同じ筆者による別の文献が見つかった。

Microwave Circuit Design Using Linear and Nonlinear Techniques
George D. Vendelin, Anthony M. Pavio, Ulrich L. Rohde

これら二つの文献は書籍の構成としては別物であるが、該当の章は全く同一となっており、変換式(の誤り)も同じであった。そこでは引用先として

Feedback and Parasitic Effect on Noise
W.A. Suter
Microwave Journal, Feb. 1983

が示されているが入手できないので、さらにオリジナルの文献 [4] を調べることにした。変換式を比較した結果、当初参照した文献には、四則演算での正負符号誤りと基準インピーダンスによるインピーダンス正規化の誤りがあることが確認できた。文献調査では、親、子、孫、ひ孫を全てたどることが肝要であろう。どこかで誤植や勘違いが発生し、その誤りが正されることなく伝承されることは良くあることだ。本稿での記述にも誤りがあるかもしれない、、、

*4

文献 [6] に示されている変換式が文献 [5] に簡潔にまとめられている。文献 [6] は、雑音に関する基本を論じた古典で、頻繁に引用される。

参考文献

- [1] Radio-Frequency and Microwave Communication Circuits: Analysis and Design
Chapter 11.7 Microwave Transistor Oscillators
Devendra K. Misra
John Wiley & Sons, Inc. , 2001
- [2] Circuit Design Using Personal Computers
Thomas R. Cuthbert, Jr.
John Wiley & Sons, Inc. , 1983
- [3] APPLICATION NOTE 033
UNDERSTANDING NOISE PARAMETER MEASUREMENTS
MODELITHICS, INC. 2009
<http://www.modelithics.com>
- [4] Changes of the Four Noise Parameters Due to General Changes of Linear Two-Port Circuits
IEEE Trans. on Electron Devices, Vol.ED-20, No.10, Oct.1973
- [5] Design of a low-noise amplifier for an IEEE802.11a wireless communication receiver
Feng Chen
Iowa State University, 2004
- [6] Theory of Noisy Fourpoles
H. Rothe, W. Dahlke
Proc. IRE, Vol.44, June 1956